数理解析研究所講究録
721巻 1990年 1-8

$F_{0,n}\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ に付随するリー環の微分と $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の像

(京大・数理研) 伊原 康隆

ある種の(簡単な)代数多様体 $Y/\mathbb{C}$ の基本群 $\pi_1=\pi_1(Y(\mathbb{C}),*)$ の中心降下列から定まる $\mathbb{Q}$ 上のリー環 $\mathrm{Lie}\,\pi_1$ の(ある条件を満す)外部微分全体のつくる $\mathbb{Q}$ 上のリー環 $\mathcal{D}_Y=\mathrm{Der}(\mathrm{Lie}\,\pi_1)$ を考えると, $\mathcal{D}_Y$ は(群 π_1 は外部自己同型をほとんど持たないにも拘らず)大きい環になり, それが大きいことの証明は各 $\mathcal{D}_Y\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_\ell$ ($\mathbb{Q}_\ell$: ℓ進体) がガロア群 $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の大きな像を含むことから(今のところ)はじめてわかる. その幾何的理由は何か? 又考える Y は次元の増大する系列 Y_n ($n\geq 4$) になっており, $n\to\infty$ とすると $\mathcal{D}_{Y_n}$ の方はどんどん小さくなってゆく —— その共通部分 $\mathcal{D}_\infty = \mathcal{D}_{Y_n}$ はどういう構造を持つか? 又 $\mathcal{D}_\infty\otimes\mathbb{Q}_\ell$ と Galois 像との関係は? こういった問題提起と, 関連する二、三の結果についてお話します. $\mathcal{D}_{Y_n}$ が真に減少することを示す計算(§2)は寺田至氏(東大・理)によるものです。又このように一つの Y でなく system Y_n 等を考える事は A. Grothendieck, P. Deligne に刺激されたのが動機です。

§1 一般に位相空間 X に対して通常のように

$$F_{0,n}X = \{(x_1,\cdots,x_n)\in X^n \mid x_i \neq x_j \ \text{ if } i\neq j\}$$

$(n\geq 1)$ とおき，複素射影直線 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ に対して

$$\begin{aligned} Y_n &= F_{0,n}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))/PGL_2(\mathbb{C}) \\ &\simeq F_{0,n-3}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})-\{0,1,\infty\}) \qquad (n\geq 4) \end{aligned}$$

を考える。従って $Y_4 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})-\{0,1,\infty\}$, $Y_5 = Y_4\times Y_4 - \Delta$, etc.
この位相的基本群は $n\geq 5$ では殆んど外部自己同型をもたない(Ivanov)が，基本群のリー環は沢山の外部微分(outer derivations)をもつ。この説明からはじめたい。

$$P_n = \pi_1(Y_n, b), \qquad b=(b_1,\cdots,b_n)$$

は $\{n$次の球面純組み紐群$\}/(\text{中心}\cong C_2)$ で，b_i と b_j の(正の)単純からまりの与える元 x_{ij} $(1\leq i,j\leq n;\ x_{ij}=x_{ji},\ x_{ii}=1)$ で生成される。さて $\{P_n(m)\}_{m\geq 1}$ を $P_n=P_n(1)$ の中心降下列とし，$\mathbb{Q}$上の次数つきリー環

$$\mathfrak{P}_n = \bigoplus_{m\geq 1} gr^m\mathfrak{P}_n;\qquad gr^m\mathfrak{P}_n = \left(P_n(m)/P_n(m+1)\right)\otimes\mathbb{Q}$$

を考えると，それは x_{ij} で代表される $gr^1\mathfrak{P}_n$ の元 X_{ij} たちで生成され，リー環としての基本関係式は

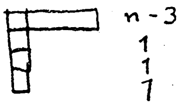
$$X_{ii}=0,\quad X_{ij}=X_{ji},\quad \sum_{j=1}^{n}X_{ij}=0 \quad (1\leq i\leq n),$$

$$[X_{ij}, X_{kl}]=0 \qquad \text{if } \{i,j\}\cap\{k,l\}=\phi$$

で与えられる (cf. [1]; also [2]).

又 定義の対称性から $\mathfrak{P}_n$ には n 次対称群 S_n が $X_{ij} \to X_{\sigma i, \sigma j}$ $(\sigma \in S_n)$ によって作用する。

(例えば S_n の $gr^1 \mathfrak{P}_n$ への作用は既約でヤング図形 

, $gr^2 \mathfrak{P}_n$ も既約 

, $gr^3 \mathfrak{P}_n$ は3つの既約成分の和であることなどがわかる。なお $n=4$ は特殊でこの時 $\mathfrak{P}_4$ は $X_{12}=X_{34}$, $X_{13}=X_{24}$ で生成される自由リー環となり, S_4 はその商 $S_3 = S_4/V_4$ を通して作用する。)

さて [3][2] により, 群 P_n の自己同型写像で各 i,j に対して共役類 $\mathrm{Conj}(x_{ij})$ を変えないものは内部自己同型に限られることがわかっているが, 対応する $\mathfrak{P}_n$ の derivation の方はそうではない。

$\mathfrak{P}_n$ の m 次 special derivation とは $\mathfrak{P}_n$ の微分

$$D : \mathfrak{P}_n \longrightarrow \mathfrak{P}_n$$

で, しかも各 i,j に対してある $T_{ij} \in gr^m \mathfrak{P}_n$ が存在して

$$D(X_{ij}) = [T_{ij}, X_{ij}]$$

と表わせるものの事とする。このとき, 各 $\sigma \in S_n$ に対して $D^\sigma = \sigma^{-1} D \sigma$ も又 m 次 special derivation になる。そこで

$$gr^m \mathcal{D}(\mathfrak{P}_n) = \left\{ \begin{array}{c} m\text{次 } S_n\text{-invariant} \\ \text{special derivations of } \mathfrak{P}_n \end{array} \right\} \Big/ \left\{ \begin{array}{c} m\text{次 } S_n\text{-invariant} \\ \text{inner derivation} \\ \text{of } \mathfrak{P}_n \end{array} \right\},$$

(有限 $\mathbb{Q}$-加群),

$$\mathcal{D}(\mathfrak{P}_n) = \bigoplus_{m\geq 1} gr^m \mathcal{D}(\mathfrak{P}_n)$$

とおくと，これも自然に $\mathbb{Q}$ 上の次数つきリー環になる．

例えば　$gr^1\mathcal{D}(\mathfrak{P}_n) = gr^2\mathcal{D}(\mathfrak{P}_n) = 0$．　又 $gr^3\mathcal{D}(\mathfrak{P}_n)$ は1次元で

$$T_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [X_{ik}[X_{ij}, X_{ik}]] \qquad (1\leq i, j\leq n)$$

で定まる special derivation で生成される．一般に m：奇数 ≥ 3 なら後に触れるように，$gr^m\mathcal{D}(\mathfrak{P}_n) \neq (0)$ となる（$gr^m\mathcal{D}(\mathfrak{P}_n)\otimes\mathbb{Q}_\ell$ が Soulé 等による cyclotomic element を含むことがわかるから）．

(問)　$\mathcal{D}(\mathfrak{P}_n)$ の構造は？

又その(生成)元の幾何学的，代数的構成は出来ないか？

さて n を一つ落す準同型　$\mathfrak{P}_n \to \mathfrak{P}_{n-1}$ が $X_{in} \to 0$ $(1\leq i\leq n)$ によって定まり，これは次数を保つ準同型

(2-1)　　$$\mathcal{D}(\mathfrak{P}_n) \to \mathcal{D}(\mathfrak{P}_{n-1}) \qquad (n\geq 5)$$

を誘導する．

<u>定理1 [2]</u>　　(2-1) は単射．

証明はややデリケートである。これによって，

(2-2)　　$$\cdots \subseteq \mathcal{D}(\mathfrak{P}_n) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{D}(\mathfrak{P}_5) \subseteq \mathcal{D}(\mathfrak{P}_4)$$

$$(2\text{-}3) \qquad \cdots \subseteq gr^m \mathfrak{D}(P_n) \subseteq \cdots \subseteq gr^m \mathfrak{D}(P_5) \subseteq gr^m \mathfrak{D}(P_4)$$

$(m \geqq 1)$ と見なせる。これがどこで stable になるかについては：

<u>定理2</u>　各 $m \geqq 1$ に対して，$n \geqq m+7$ なら

$$gr^m \mathfrak{D}(P_{n+1}) = gr^m \mathfrak{D}(P_n).$$

証明は S_n の表現論の演習問題。上界 $m+7$ は改善の余地がある。

真に減少する事については，後の表でわかるように，$m=7$ が調べる必要のある最小の m なのだが，これについて，

$$\dim gr^7 \mathfrak{D}(P_5) = 1 < 2 = \dim gr^7 \mathfrak{D}(P_4)$$

であることが寺田至氏の計算によって確認された。

§2　(2-2),(2-3)の共通部分を $\mathfrak{D}_\infty$，$gr^m \mathfrak{D}_\infty$ と書くと，$\mathfrak{D}_\infty = \bigoplus_{m \geqq 1} gr^m \mathfrak{D}_\infty$ で，各素数 l に対して $\mathfrak{D}_\infty \otimes \mathbb{Q}_l$ は $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の $\pi_1^{pro\text{-}l}(Y_n)$ への作用から生ずる像 $\mathfrak{g}_l = \bigoplus_{m \geqq 1} gr^m \mathfrak{g}_l$ を含む（[4]参照）.

$$\mathfrak{g}_l \subseteq \mathfrak{D}_\infty \otimes \mathbb{Q}_l.$$

$\mathfrak{g}_\ell$ については，C. Soulé [5] により $\dim(gr^m \mathfrak{g}_\ell) \geq 1$ $(m \geqslant 3, \text{odd})$ (cf. [4][6])
又 [4] に於て $[gr^m \mathfrak{g}_\ell, gr^{m'} \mathfrak{g}_\ell] \neq 0$ $(m, m' : \text{odd} \geqslant 3, m \neq m')$，等が示されているので，それらにより $gr^m \mathfrak{D}_\infty$ の次元の一つの下界が与えられる．わかっている部分を表にすると([ ])：

	m	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	$\dim gr^m \mathfrak{D}(P_4)$	0	1	0	1	0	2	1	4	2	9	7
$\geq$	$\dim gr^m \mathfrak{D}_\infty$											
$\geq$	$\dim gr^m \mathfrak{g}_\ell$	0	1	0	1	0	1	1	≥ 1	≥ 1	≥ 2	≥ 1

これによって $\dim gr^m \mathfrak{D}_\infty$ が $m \leq 6$，$m = 8$ では確定し，$m = 7$ では寺田氏の計算によって $\dim gr^7 \mathfrak{D}(P_5) = 1$，従って $\dim gr^7 \mathfrak{D}_\infty = 1$ がわかった．$m \geq 9$ については未だ $gr^m \mathfrak{D}_\infty$ はわかっていない．従って次の問を「予想」とする根拠は未だ十分とは云えないが，正しければステキと思われる．

問 $\qquad \mathfrak{g}_\ell = \mathfrak{D}_\infty \otimes \mathbb{Q}_\ell$?

[参考文献]

[1] T. Kohno, On the holonomy Lie algebra and the nilpotent completion of the fundamental group of the complement of hypersurfaces, Nagoya J. Math 92 (1983), 21-37

[2] Y. Ihara, Automorphisms of pure sphere braid groups and Galois representations, to appear in Grothendieck Festschift, Birkhäuser

[3] N.V. Ivanov, Algebraic properties of mapping class groups of surfaces, "Geometric and Algebraic Topology" 18 (1986), 15-35, Banach Center Publ.

[4] Y. Ihara, The Galois representation arising from $\mathbb{P}^1 - \{0,1,\infty\}$ and Tate twists of even degree, in "Galois groups over $\mathbb{Q}$", MSRI Publications 16 (1987), 299-314, Springer

[5] C. Soulé, On higher p-adic regulators, SLN 854 (1981), 372-401

[6] H. Ichimura - K. Sakaguchi, The non-vanishing of a certain Kummer character χ_m (after C. Soulé) and some related topics, Adv. Studies in Pure Math 12 (1987), 53-64

[7] Y. Ihara, Some problems on three point ramifications and associated large Galois representations, ibid, 173-188.